2.2.10 Slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice I

Předpoklady: 2204, 2206

Pedagogická poznámka: Řešení slovních úloh představuje pro značnou část studentů nejobtížnější část matematiky. Důvod je jednoduchý. Po celou dobu studia jsou ve všech předmětech vedeni k tomu, že cílem vzdělávání je pamatovat si sadu postupů na řešení různých úkolů. Z této sady si pak hotové postupy vybírají a snaží se je používat. Tato metoda jim umožňuje řešit i poměrně složité úlohy, pokud jsou všechny „stejné“ – tedy řeší se pořád stejným postupem. Naopak v případě úloh, které se řeší pokaždé jinak (slovní úlohy nebo sestavování výrazů), tento postup selhává a studenti jsou značně bezradní. Je dobré si uvědomit, že v této kapitole jde o kvalitativně jiný problém než v naprosté většině ostatních.
Slovní úlohy jsou rozděleny do několika skupin, přesto se nepoužívá obvyklé dělení na příklady o společné práci, příklady o směsích apod. Studenti pak mívají pocit, že všechny úlohy, kde se vyskytuje práce, se řeší úplně stejně, což není pravda (mám krásný příklad do písemky, kde se sice mluví o společné práci, ale sestavuje se rovnice s neznámou v čitateli).

Pedagogická poznámka: Všechny slovní úlohy jsou označeny jako příklady. Přesto se většina z nich řeší částečně (do sestavení rovnice) na tabuli. Ne však klasickým postupem, ale vždy po krocích až poté, co studenti dostanou šanci pokročit sami. Kromě správného řešení si pak ukazujeme i nejzajímavější špatné nápady, které se ve třídě objeví.
Během hodiny nečekáme, až se všem podaří příklady dořešit. Příklad považuji za „vyřešený“ pokud si na tabuli ukážeme správně sestavené rovnice. Dopočítat rovnice si studenti mohou doma. Snažíme se postupovat tak, abychom stihli takto projít alespoň prvních pět příkladů.

Pedagogická poznámka: Upozorněte studenty, že nemají zapisovat zadání slovo od slova. Zbytečně tak zdržují.

Několik rad na úvod:

- Proměnné si značíme písmeny, která naznačují jejich význam.
- Proměnných můžeme zvolit klidně víc a pak jejich počet zmenšujeme pomocí dalších rovnic a vzájemného dosazování.
- Každá rovnice musí jít přečíst slovy tak, aby dávala reálný význam.
- Každá informace ze zadání většinou odpovídá nějaké rovnici.
- Příklad se nemusí řešit „najednou“ okamžitým sestavením rovnice s jednou neznámou z jedné vody. Naopak lepší je postupně využívat informace ze zadání a zbavovat se přebytečných písmen v rovnicích.

Pedagogická poznámka: Následující příklady většinou nevyžadují nic jiného než správné přečtení zadání a jeho přepsání do rovnic. Většinu hodiny tak chodím po třídě a těm, co mají něco špatně, říkám: „Přečti si pořádně zadání“.

Př. 1: Když jsme od čitatele i jmenovatele zlomku $\frac{3}{4}$ odečetli stejné číslo, vyšel nám zlomek rovný zlomku $\frac{4}{3}$. Jaké číslo jsme odečítali?

Odečítané číslo … x

Původní zlomek … $\frac{3}{4}$

Odečteme číslo x od jmenovatele i čitatele $\frac{3-x}{4-x}$.

Změněný zlomek rovná $\frac{4}{3}$.

$$\frac{3-x}{4-x}=\frac{4}{3} \quad /\cdot 3(4-x)$$
$$3(3-x)=4(4-x)$$
$$9-3x=16-4x$$
$$x=7$$

Odečítali jsme číslo 7.

Pedagogická poznámka: Nejčastější chybou je zápis $\frac{3}{4}-x$, kde je snadná protiargumentace, protože neznámou studenti neodečítají od čitatele a jmenovatele zvlášť, ale od celého zlomku. Setkal jsem se i s rovnicí $\frac{3}{4}-\frac{x}{x}$, kde si autor neuvědomil, že $\frac{x}{x}=1$.

Př. 2: Malíř pokojů při přípravě růžové barvy smíchal červenou a bílou barvu v poměru objemů 2:3. Aby získal sytější tón, přilil do hotové směsi ještě 9 litrů červené a 9 litrů bílé barvy. Tak se poměr červené a bílé barvy ve směsi změnil na 5:6. Kolik litrů červené a kolik litrů bílé barvy malíř původně smíchal?

Máme dvě barvy, zvolíme si dvě neznámé. (Musíme tedy najít i dvě rovnice)

Bílá barva b

Červená barva c

Poměr červené a bílé barvy je 2 ku 3: $\frac{c}{b}=\frac{2}{3}$.

K červené a bílé barvě přiliji 9 litrů: $\frac{c+9}{b+9}$.

Poměr se změní na 5 ku 6: $\frac{c+9}{b+9}=\frac{5}{6}$.

Máme dvě rovnice: $\frac{c}{b}=\frac{2}{3}$ a $\frac{c+9}{b+9}=\frac{5}{6}$, teď je to manuální záležitost.

Z první rovnice si vyjádříme b: $\frac{c}{b}=\frac{2}{3} \Rightarrow 3c=2b \Rightarrow b=\frac{3c}{2}$.

Upravíme druhou rovnici: $\frac{c+9}{b+9}=\frac{5}{6} \quad /6(b+9)$.

$6\cdot(c+9)=5\cdot(b+9)$

Výraz $b=\frac{3c}{2}$ dosadíme místo b do druhé rovnice: $6c+54=5\cdot\left(\frac{3c}{2}+9\right)$.

$6c+54=\frac{15c}{2}+45 \quad /\cdot 2$

$12c+108=15c+90$

$18=3c$

$c=6$

Dosadíme do vztahu pro b: $b=\frac{3c}{2}=\frac{3\cdot 6}{2}=9$.

Malíř původně smíchal 9 litrů bílé a 6 litrů červené barvy.

Pedagogická poznámka: Na předchozím příkladě je možné studentům demonstrovat, jak nevýhodné je snažit se udělat všechno najednou (značná část z nich totiž sestaví jednu špatnou rovnici se dvěma neznámými). Řekneme si, že zadání udává dvakrát informaci o poměrech ,a tak bychom zřejmě měli dvakrát sestavovat rovnici o poměru. Když na tabuli napíši první z nich $\frac{c}{b}=\frac{2}{3}$, druhou už sestaví skoro každý.

Př. 3: Ve třídě 1.K se psala čtvrtletní písemka z matematiky. Desetina studentů dostala jedničku, třetina dostala dvojku. Trojku dostaly čtyři patnáctiny všech studentů a čtyřku pětina. Kolik studentů psalo čtvrtletku, když pětku dostali tři z nich?

Počet studentů … x

Jedničkáři (desetina studentů) … $\frac{x}{10}$

Dvojkaři (třetina studentů) … $\frac{x}{3}$

Trojkaři (čtyři patnáctiny studentů) … $\frac{4}{15}x$

Čtyřkaři (pětina studentů) … $\frac{x}{5}$

Pětkaři (3 studenti) … 3

Součet studentů rozdělených podle známek = všichni studenti, kteří psali písemku.

$\frac{x}{10}+\frac{x}{3}+\frac{4x}{15}+\frac{x}{5}+3=x \quad /\cdot 30$

$3x+10x+8x+6x+90=30x$

$90=3x$

$x=30$

Čtvrtletku psalo 30 studentů 1.K.

Pedagogická poznámka: Nejčastější chybou je rovnice $\frac{1}{10}+\frac{1}{3}+\frac{4}{15}+\frac{1}{5}+3=x$, protože studenti nerozlišují $\frac{1}{10}$ jako číslo a $\frac{1}{10}x$ jako část nějakého celku. Ptám se jich, která $\frac{1}{10}$ studenta dostává 1 ze čtvrtletky.

Př. 4: Hotel Merkur může současně ubytovat až 308 hostů ve svých 131 dvoulůžkových nebo třílůžkových pokojích. Kolik je kterých pokojů?

Počet dvoulůžkových pokojů … d
Počet třílůžkových pokojů … t

Počet všech pokojů 131 $\Rightarrow$ $d+t=131 \Rightarrow t=131-d$.
Lidé na 2-lůžkových + lidé na 3-lůžkových = kapacita hotelu: $2d+3t=308$
Do druhé rovnice dosadíme: $t=131-d$.
$2d+3(131-d)=308$
$2d+393-3d=308$
$d=85$
Z vyjádření t určíme počet třílůžkových pokojů: $t=131-d=131-85=46$.
Hotel má 85 dvoulůžkových a 46 třílůžkových pokojů.

Pedagogická poznámka: Jeden z příkladů, kde pojmenování proměnných hodně usnadňuje řešení. Dobrá ukázka toho, že každý údaj ze zadání se dá použít na sestavení rovnice.
Někteří studenti chápou, že musí sestavit rovnici, která vyjadřuje, kolik lidí se do pokojů vejde, ale nedokáží to. Většině z nich pomáhá, když jim dám spočítat, kolik lidí se vejde například do tří dvoulůžkových a čtyř pětilůžkových pokojů. Jde o ukázku obecnějšího postupu, kdy výpočet pomocí neznámých kopíruje konkrétní postup s čísly.

Př. 5: Jirka střádá do pokladničky pouze pětikoruny a dvoukoruny. Včera z ní peníze vysypal a spočítal, že tak našetřil 178 korun. Když chtěl na každou pětikorunu položit dvě dvoukoruny, zjistil, že mu jedna dvoukoruna chybí. Kolik kterých mincí nastřádal?

Počet pětikorun … p
Počet dvoukorun … d
Našetřil 178 Kč (součet hodnot na mincích): $5p+2d=178$.
1 dvoukoruna chybí, aby na každou pětikorunu, připadaly 2 dvoukoruny.
$2p=d+1 \Rightarrow d=2p-1$
Dosadíme do první rovnice:
$5p+2(2p-1)=178$
$5p+4p=180$
$9p=180$
$p=20$
Počet dvoukorun: $d=2p-1=2\cdot 20-1=39$.

Jirka nastřádal 20 pětikorun a 39 dvoukorun.

Pedagogická poznámka: Někteří studenti řeší příklad bez rovnic tak, že si spočítají hodnotu jedné kopičky (9 Kč) a zjistí, kolik jich Petr sestavil. Podle mě jde o logicky složitější úvahu než sestavení rovnic a jenom to ukazuje, jak málo jsou fakticky v sestavování rovnic cvičeni. Opět se objevují chyby, které pramení ze špatného označení proměnných nic neříkajícími písmeny *x* a *y*.
Jedna studentka dokonce použila na vyřešení příkladu rovnici: $5x+4x=180$. Což je naprosto skvělá myšlenka.

Př. 6: Kilogram jednoho druhu oříšků se prodává za 130Kč, kilogram druhého druhu oříšků za 250Kč. V jakém poměru jsou oba druhy oříšků smíchány ve směsi, jejíž cena je 220 Kč za kilogram?

Množství levnějších oříšků … l
Množství dražších oříšků … d
Cena za přidané levné + cena za přidané drahé = cena oříšků ve směsi: $130l+250d=220$.
Obě množství oříšků musí dát dohromady 1 kg: $l+d=1$.
Vyjádříme l: $l+d=1 \Rightarrow l=1-d$
Dosadíme do první rovnice:

$$130(1-d)+250d=220$$
$$130-130d+250d=220$$
$$120d=90$$
$$d=\frac{3}{4}$$

Dopočteme *l*: $l=1-d=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.
Poměr množství: $\frac{1}{4}:\frac{3}{4}=1:3$.
Ve směsi, která se prodává za 220Kč, jsou oříšky namíchány v poměru 1:3.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je podobný příkladu 4. Studenti mají často problém sestavit rovnici $l+d=1$.

Pedagogická poznámka: Část studentů postupuje většinou při řešení podstatně rychleji než zbytek třídy. Příklady z Petákové je mohou zabavit.

Př. 7: Petáková:
strana 18/cvičení 41
strana 18/cvičení 43
strana 19/cvičení 46

Shrnutí: Proměnné ve slovních úlohách značíme tak, aby bylo jasné, co zastupují.